# Système binaire et logique combinatoire

**Philippe Notez (philippe.notez@inmc.fr)**


**Sommaire**



**Introduction**

L'électronique et l'informatique ont profondément modifié notre société. C'est certainement la révolution industrielle la plus rapide de l'histoire de l'humanité. Aujourd'hui, les systèmes embarqués sont omniprésents dans notre vie quotidienne et nous emmènent vers un monde de plus en plus connecté, avec ses avantages et ses inconvénients...



Ce document présente le système de numération binaire ainsi que la logique combinatoire, constituant le premier pilier de l'électronique numérique (le second pilier étant la logique séquentielle), en espérant toujours être le plus clair et précis possible. Malgré tout le soin apporté à la rédaction, l'auteur vous remercie de bien vouloir le contacter si vous relevez la moindre erreur ou omission, et vous souhaite une agréable lecture.

**Systèmes de numération**

Dans un système de numération, chaque chiffre positionné à gauche du chiffre des unités est multiplié par la base, autant de fois qu'il y a de décalages par rapport à ce dernier. Chaque chiffre positionné à droite du chiffre des unités, c'est à dire après la virgule, est divisé par la base, autant de fois qu'il y a de décalages par rapport à ce dernier.

Nous utilisons le système de numération décimal composé de 10 ~~doigts~~ chiffres, de 0 à 9. Ce système a donc comme base la valeur 10.

Le chiffre des dizaines étant décalé d'une position vers la gauche par rapport au chiffre des unités, on le multiplie une fois par la base, c'est à dire 10. Le chiffre des centaines étant décalé de deux positions vers la gauche par rapport au chiffre des unités, on le multiplie deux fois par la base, c'est à dire 10 x 10. Et ainsi de suite...

5287,34 = 5000 + 200 + 80 + 7 + 0,3 + 0,04 = (5 x 1000) + (2 x 100) + (8 x 10) + (7 x 1) + (3 / 10) + (4 / 100)

Chaque chiffre a un *poids* correspondant à la base élevée à la puissance du rang. Dans l'exemple ci-dessus, le chiffre 5 a le poids $10^3$ car le chiffre 5 a le rang 3 (on compte à partir du rang 0 pour le chiffre des unités).

$5287{,}34 = (5 \times 10^3) + (2 \times 10^2) + (8 \times 10^1) + (7 \times 10^0) + (3 \times 10^{-1}) + (4 \times 10^{-2})$

L'ordinateur utilise le système de numération binaire composé uniquement de 2 chiffres, 0 et 1. Ce système a donc comme base la valeur 2.

Pour convertir un nombre décimal en binaire, il faut utiliser un tableau. Prenons l'exemple du nombre 243 :

**243 en base 10 (décimal)**

| $10^2$ | $10^1$ | $10^0$ |
|---|---|---|
| 100 | 10 | 1 |
| 2 | 4 | 3 |

$243 = 2 \times 100 + 4 \times 10 + 3 \times 1$

$243 = 2 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 3 \times 10^0$

**243 en base 2 (binaire)**

| $2^7$ | $2^6$ | $2^5$ | $2^4$ | $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

$243 - 128 = 115$

$115 - 64 = 51$

$51 - 32 = 19$

$19 - 16 = 3$

$3 - 2 = 1$

$1 - 1 = 0$

$243 = 128 + 64 + 32 + 16 + 2 + 1$

$243 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^1 + 2^0$

**243 (décimal) = 11110011 (binaire)**

Le bit (contraction de *binary digit*, chiffre binaire) le plus à gauche a le poids le plus fort ($2^7$ dans notre exemple), on appelle ce bit le MSB (*Most Significant Bit*). A l'opposé, le bit le plus à droite a le poids le plus faible qui est toujours égal à $2^0$, on appelle ce bit le LSB (*Least Significant Bit)*. C'est le LSB qui indique si le nombre est pair (valeur 0) ou impair (valeur 1).

**Binaire signé et non signé**

Le tableau suivant donne la conversion en binaire non signé pour les valeurs 0 à 15 :

| $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | décimal |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 11 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 12 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 13 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 14 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 15 |

Dans l'hypothèse où nous avons uniquement besoin de ces valeurs, 4 bits suffisent en binaire non signé. Il nous faudra 8 bits (un octet) pour les valeurs 0 à 255, 16 bits pour les valeurs 0 à 65535, etc… Par contre, si nous avons besoin de valeurs négatives, nous devons utiliser le binaire signé :

| $2^3$ | $2^2$ | $2^1$ | $2^0$ | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 2 | 1 | décimal |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | -1(7-8) |
| 1 | 1 | 1 | 0 | -2(6-8) |
| 1 | 1 | 0 | 1 | -3(5-8) |
| 1 | 1 | 0 | 0 | -4(4-8) |
| 1 | 0 | 1 | 1 | -5(3-8) |
| 1 | 0 | 1 | 0 | -6(2-8) |
| 1 | 0 | 0 | 1 | -7(1-8) |
| 1 | 0 | 0 | 0 | -8(0-8) |

Pour obtenir une valeur négative, nous utilisons la méthode du complément à deux :

- nous prenons une valeur positive
- nous inversons chaque bit (complément à 1)
- nous ajoutons 1

Soustraction

```
    7 = 0111          0100 (4)
C à 1 = 1000        + 1001 (-7)
C à 2 = 1001        ------
                    = 1101 (-3)
```

Si on pose l'opération 4 - 7, c'est à dire 4 + (-7), on calcule d'abord le complément à deux de 7 pour obtenir sa valeur négative, puis on effectue une addition, en sachant que :

- 0 + 0 = 0
- 0 + 1 = 1
- 1 + 0 = 1
- 1 + 1 = 10 car 10 en binaire = 2 en décimal

Dans ce dernier cas, la somme de 1 + 1 = 0 avec une retenue de 1, tout comme la somme de 9 + 1 = 0 avec une retenue de 1. La retenue est donc aussi importante que la somme, sinon le résultat est faux !

En utilisant 4 bits en binaire signé, nous n'avons plus à notre disposition les valeurs 0 à 15, mais les valeurs -8 à 7, c'est à dire 8 valeurs négatives (-1 à -8) et 8 valeurs positives ou nulles (0 à 7). En d'autres termes, nous avons les valeurs $-2^{n-1}$ jusqu'à $2^{n-1} - 1$, n correspondant au nombre de bits disponibles (4 dans notre exemple).

Nous constatons également que le MSB des valeurs négatives est à 1, le MSB est donc le bit de signe (0 pour les valeurs positives ou nulles, 1 pour les valeurs négatives).

Il nous faudra 8 bits pour les valeurs -128 à 127, 16 bits pour les valeurs -32767 à 32768, etc…

En conclusion, avec une machine travaillant sur 4 bits, comme le microprocesseur Intel 4004 commercialisé en 1971, on pouvait utiliser le binaire non signé pour les valeurs 0 à 15 ou le binaire signé pour les valeurs -8 à 7.

**Fonctions logiques**

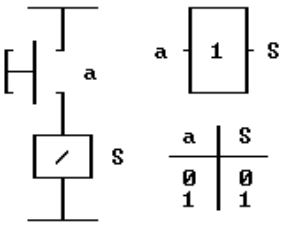
Les fonctions logiques constituent la base de la logique combinatoire : la sortie dépend uniquement de l'état de ou des entrée(s).

Dans les schémas suivants, l'interrupteur *a* peut prendre les valeurs 0 et 1 :

- la valeur 0 correspond à son état de repos (non actionné)
- la valeur 1 correspond à son état de travail (actionné)

Par convention, on note $\bar{a}$ (on prononce *a barre*) son état de repos et $a$ son état de travail. Attention, la valeur 1 ne correspond pas toujours au passage du courant. En effet, si l'interrupteur est fermé au repos, la valeur 0 ($\bar{a}$) correspond au passage du courant, il ne faut donc pas confondre.

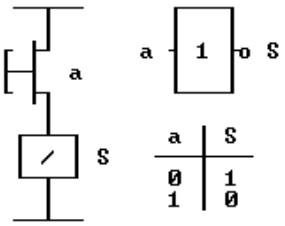
**Fonction OUI**




| a | S |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

$S=a$

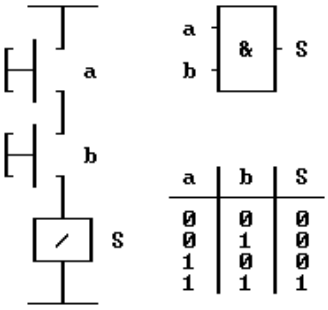
**Fonction NON**




| a | S |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

$S=\bar{a}$

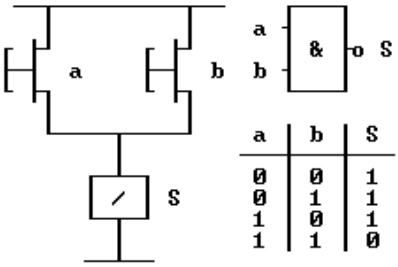
**Fonction ET (AND)**




| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$S=a.b$

**Fonction NON ET (NAND)**




| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

$S=\overline{a.b}=\bar{a}+\bar{b}$

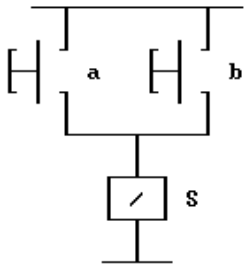
(symbole . pour le ET, symbole + pour le OU)

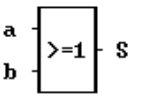
**Lois de De Morgan**

$\overline{a.b} = \bar{a}+\bar{b}$ (le ET barré devient un OU)

$\overline{a+b} = \bar{a}.\bar{b}$ (le OU barré devient un ET)

### Fonction OU (OR)

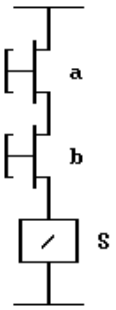


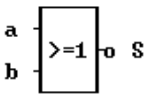




| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

$S=a+b$

### Fonction NON OU (NOR)

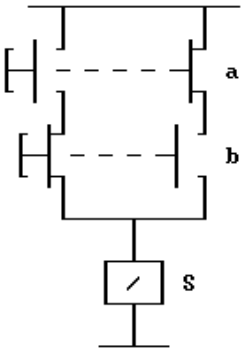


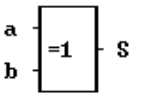




| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

$S=\overline{a+b}=\overline{a}.\overline{b}$

### Fonction OU EXCLUSIF (EXOR)



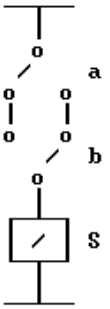




| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

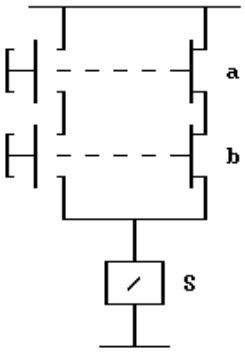
$S=(\overline{a}.b)+(a.\overline{b})$

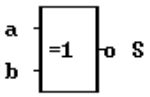
### Schéma du va et vient

La fonction OU EXCLUSIF correspond au va et vient.




### Fonction NON OU EXCLUSIF (NEXOR)



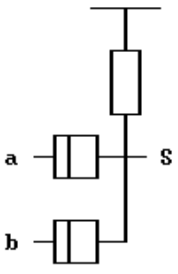

| a | b | S |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

La fonction NON OU EXCLUSIF correspond à un comparateur : la sortie est à 1 si et seulement si les entrées sont au même niveau logique.

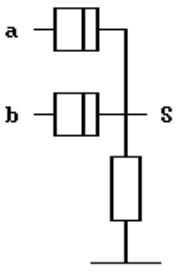
$S=\overline{(a.b)}+(a.b)=(\overline{a}.\overline{b}).(a.b)=(\overline{a}+\overline{b}).(a+b)$

$S=(\overline{a}.a)+(a.b)+(\overline{b}.a)+(\overline{b}.b)=(\overline{b}.a)+(b.a)$

### Réalisation avec des diodes




Fonction ET




Fonction OU

**Addition et soustraction de deux nombres 4 bits**

## Demi-additionneur (addition de 2 bits)

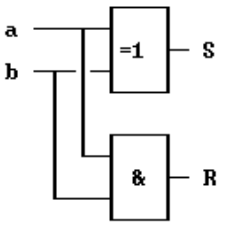
0+0=0 (somme=0, retenue=0)

0+1=1 (somme=1, retenue=0)

1+0=1 (somme=1, retenue=0)

1+1=10 (somme=0, retenue=1)

| a | b | S | R |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |




1+1=10 car 10 en binaire = 2 en décimal

C'est un demi-additionneur car la retenue précédente n'est pas prise en compte.

## Plein additionneur (addition de 3 bits)

0+0+0=0 (somme=0, retenue=0)

0+0+1=1 (somme=1, retenue=0)

0+1+0=1 (somme=1, retenue=0)

0+1+1=10 (somme=0, retenue=1)

1+0+0=1 (somme=1, retenue=0)

1+0+1=10 (somme=0, retenue=1)

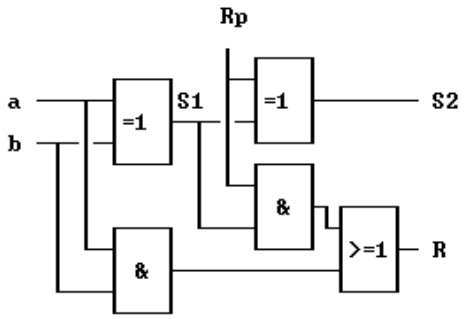
1+1+0=10 (somme=0, retenue=1)

1+1+1=11 (somme=1, retenue=1)

1+1+1=11 car 11 en binaire = 3 en décimal

retenue précédente

| a | b | Rp | S2 | R |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |




Pour des raisons de lisibilité, le point (fonction ET) est sous-entendu dans les opérations suivantes.

$$S2=\overline{a}bRp+a\overline{b}Rp+ab\overline{Rp}+\overline{ab}Rp=Rp(ab+\overline{ab})+\overline{Rp}(a\overline{b}+\overline{a}b)=Rp(ab+\overline{ab})+\overline{Rp}S1$$

Pour réaliser une somme, il faut utiliser la fonction OU EXCLUSIF.

Si S2 est la somme de S1 et de Rp, alors S2 doit être égal à $\overline{Rp}S1+Rp\overline{S1}$.

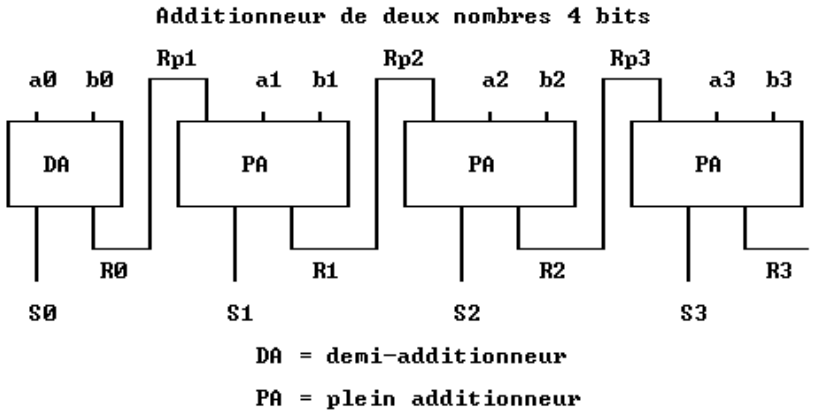
Pour obtenir ce résultat, il faut que le terme S1 soit égal à $a\overline{b}+\overline{a}b$.

$$S1=a\overline{b}+\overline{a}b=\overline{a\overline{b}.\overline{a}b}=(\overline{a}+b)(a+\overline{b})=\overline{a}a+\overline{a}\overline{b}+ba+b\overline{b}=\overline{a}\overline{b}+ab$$

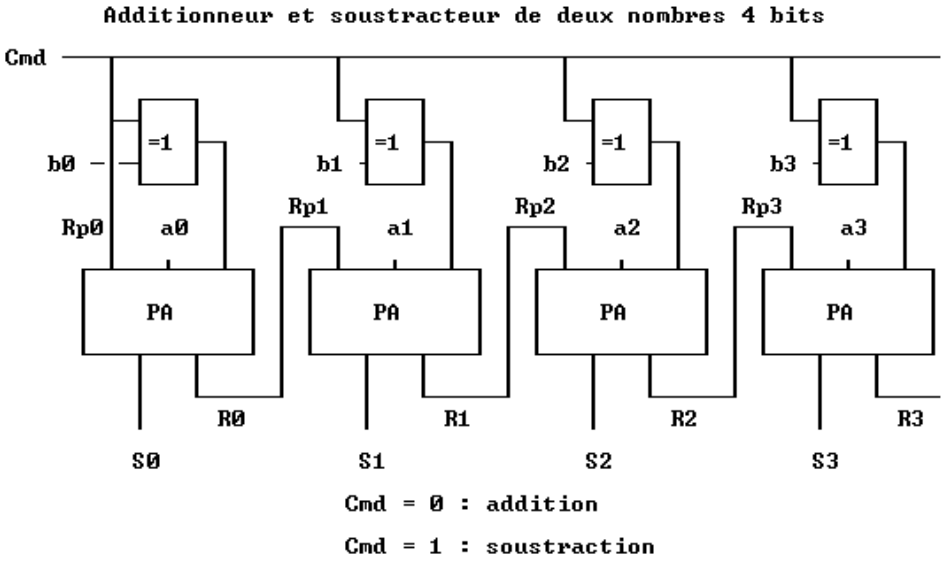
Nous obtenons bien $S2=\overline{Rp}S1+Rp\overline{S1}$.

$$R=\overline{a}bRp+a\overline{b}Rp+ab\overline{Rp}+abRp=Rp(\overline{a}b+a\overline{b}+ab)+\overline{Rp}ab=Rp(S1+ab)+\overline{Rp}ab$$

$$R=\overline{Rp}S1+\overline{Rp}ab+Rpab=\overline{Rp}S1+ab(\overline{Rp}+Rp)=\overline{Rp}S1+ab$$




On peut utiliser un demi-additionneur pour les bits *a0* et *b0* car il n'y a pas de retenue précédente.




Le bit de commande *Cmd* permet la sélection de la fonction.

Dans le cas d'une addition (Cmd = Rp0 = 0), les sorties des fonctions OU EXCLUSIF fournissent les bits *b* correspondants. D'autre part, Rp0 étant à 0, il n'y a pas de retenue précédente.

Dans le cas d'une soustraction (Cmd = Rp0 = 1), les sorties des fonctions OU EXCLUSIF fournissent l'inverse des bits *b* correspondants, réalisant ainsi le complément à 1. Le complément à 2 (on ajoute 1) est réalisé grâce à la retenue Rp0 qui est à 1.

**Multiplication binaire**

Soit la multiplication 11 x 19. On prend le premier nombre, on part de 1 et on multiplie par 2 jusqu'à s'en approcher le plus possible, sans le dépasser : 1, 2, 4, 8, 16 (16 étant plus grand que 11, on s'arrête à 8).

On prend le deuxième nombre et on le multiplie par les valeurs obtenues :

- 19 x 1 = 19
- 19 x 2 = 38
- 19 x 4 = 38 x 2 = 76
- 19 x 8 = 76 x 2 = 152

On garde les résultats correspondants aux valeurs 1, 2 et 8 (1 + 2 + 8 = 11). On obtient 19 + 38 + 152 = 209.

Pour un esprit humain, c'est peut-être un peu tordu, mais pour un ordinateur, c'est l'idéal ! En effet, une multiplication par 2 est bien plus rapide qu'une addition puisqu'il suffit de décaler tous les bits d'une position

vers la gauche (pour effectuer une division par 2, on décale tous les bits d'une position vers la droite). Or, dans notre calcul, on ne fait que des multiplications par 2. Bon, c'est vrai, on fait quand-même deux additions à la fin, mais c'est mieux que d'ajouter 19+19+19… 11 fois.

**Documentation complémentaire**

- Transistors et portes logiques
- MOSFET
- Familles logiques